OPCIÓN A

1. a) Discuta para qué valores de **k** el sistema siguientes es compatible: (7 puntos)

$$\begin{cases} x+2y-z=8 \\ 2x-3y+z=-1 \\ 3x-y+kz=5 \end{cases}$$

b) Resuélvalo en el caso (o los casos) en que sea compatible. (3 puntos)

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & k \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & -7 & k+3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix}=-7k \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow -7k=0 \Rightarrow k=0 \Rightarrow$$

$$\forall k \in \Re - \{0\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ k=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & -7 & 3 & -17 \\ 0 & -7 & 3 & -19 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & -7 & 3 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A)=2 \neq rang\ (A)=3 \Rightarrow$$

$Sistema\ Incompatible$

$b)\ Cuando\ es\ compatible\ \det er \min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & k & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & -7 & 3 & -17 \\ 0 & -7 & k+3 & -19 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & -7 & 3 & -17 \\ 0 & 0 & k & -2 \end{array}\right) \Rightarrow kz=-2 \Rightarrow z=-\frac{2}{k} \Rightarrow -7y-3\cdot\frac{2}{k}=-17$$

$$7y=17-\frac{6}{k} \Rightarrow y=\frac{17k-6}{7k} \Rightarrow x+2\cdot\left(\frac{17k-6}{7k}\right)-\left(-\frac{2}{k}\right)=8 \Rightarrow x=8-\frac{2}{k}-\frac{34k-12}{7k}=\frac{56k-14+34k-12}{7k}$$

$$x=\frac{9k-26}{7k} \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=\left(\frac{9k-26}{7k}, \frac{17k-6}{7k}, -\frac{2}{k}\right)$$

2. Determina el (los) punto (s) de la recta $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{2}$ que equidistan de los planos

$$\pi_1: x+y+z+3=0 \quad y \quad \pi_2:\begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=-\lambda+\mu \\ z=-6+\mu \end{cases}$$ (10 puntos)

$$\pi_2:\begin{vmatrix} x+3 & y & z+6 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -(x+3)+(z+6)-y=0 \Rightarrow \pi_2: x+y-z-3=0$$

$$r:\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=2t \end{cases} \Rightarrow Equidis\tan cia \Rightarrow \frac{(1+2t)+(-1+t)+2t+3}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\pm\frac{(1+2t)+(-1+t)-2t-3}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1+2t-1+t+2t+3=1+2t-1+t-2t-3 \Rightarrow 5t+3=t-3 \Rightarrow 4t=-6 \Rightarrow t=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2} \Rightarrow \\ 1+2t-1+t+2t+3=-(1+2t-1+t-2t-3) \Rightarrow 5t+3=-t+3 \Rightarrow 6t=0 \Rightarrow t=0 \end{cases}$$

$$Cuando\ t=-\frac{3}{2} \Rightarrow P\begin{cases} x=1+2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) \\ y=-1+\left(-\frac{3}{2}\right) \\ z=2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow P\left(-2\,,-\frac{5}{2}\,,-3\right)$$

$$Cuando\ t=0 \Rightarrow Q\begin{cases} x=1+2\cdot 0 \\ y=-1+0 \\ z=2\cdot 0 \end{cases} \Rightarrow P(1\,,-1\,,0)$$

3.- Dada la función: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad -2\le x\le -1 \\ \dfrac{x^2-3}{2} & si \quad -1<x\le 0 \end{cases}$

a) Compruebe que f (x) es continua en el intervalo **[- 2 , 0]** y derivable en el intervalo **(- 2 , 0).**
(6 puntos)
b) Estudie si la función es creciente o decreciente en los intervalos (- 2 , - 1) y (- 1 , 0).
(4 puntos)

$a)$

$Estudio\ de\ la\ continuidad\ en\ x=1$

$$\begin{cases} f(-1)=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\dfrac{1}{-1}=-1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\dfrac{(-1)^2-3}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1 \end{cases} \Rightarrow f(-1)=\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=-1 \Rightarrow Es\ continua$$

Continuación del Problema 3 de la opción A

$a)Continuación$

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2} & si \quad -2<x<-1\\ \dfrac{2x}{2} & si \quad -1<x<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-} f'(x) = -\dfrac{1}{(-1)^2} = -1\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f'(x) = -1\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^+} f'(x) = -1 \Rightarrow Derivable$$

$b)$

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2} & si \quad -2<x<-1\\ x \quad si & -1<x<0\end{cases} \Rightarrow Creciente \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow$$

$$En\ x\in(-2\,,-1) \Rightarrow -\frac{1}{x^2}>0 \Rightarrow \begin{cases}-1<0 \Rightarrow \forall x\in\Re\\ x^2>0 \Rightarrow \forall x \in \Re\end{cases}$$

	-2 -1
-1 < 0	**(-)**
x^2 > 0	**(+)**
Solución	**(-)**

Es decreciente en el intervalo (- 2 , -1)

$$En\ x\in(-1\,,0) \Rightarrow x>0 \Rightarrow Positiva\ en\ (-1\,,0)$$

Es creciente en el intervalo (- 1 , 0)

4.- Calcula la siguiente integral indefinida $\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$ (10 puntos)

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^3-x} & x \\ -x & \end{array}$$

$$\int \frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$$

$$\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx = \int x\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot x^2 - \int \frac{\frac{dt}{2}}{t} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\int\frac{dt}{t} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot \ln t = \frac{1}{2}\left[x^2 + \ln\left(x^2+1\right)\right] + K$$

$$x^2+1 = t \Rightarrow 2x\,dx = dt \Rightarrow x\,dx = \frac{dt}{2}$$

OPCIÓN B

1. a) Discuta por qué valores de m el sistema siguiente es compatible: (7 puntos)

$$\begin{cases} y+z=1 \\ (m-1)x+3y+z=2 \\ x+(m-1)y-z=0 \end{cases}$$

b) Resuélvalo en el caso (o los casos) en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

$a)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m-1 & 3 & 1 \\ 1 & m-1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m-2 & 3 & 0 \\ 2 & m-1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} m-2 & 3 \\ 2 & m-1 \end{vmatrix} = (m-2)(m-1)-6 = m^2-3m+2-6 \Rightarrow$$

$$|A| = m^2-3m-4 \Rightarrow \Delta = (-3)^2-4\cdot1\cdot(-4) = 9+16 = 25 \geq 0 \Rightarrow m = \frac{3\pm\sqrt{25}}{2\cdot1} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{3+5}{2} = 4 \\ m = \dfrac{3-5}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\forall m \in \Re - \{-1\,,\,4\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ k=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -6 & -3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$Si\ k=4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2 < Número\ de\ incognitas \Rightarrow$$

$$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$b)$

$$Si\ k=4 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x+y=1 \Rightarrow x=1-y \Rightarrow 3y-2z=-1 \Rightarrow 2z=3y+1 \Rightarrow z=\frac{3y+1}{2} \Rightarrow$$

$$Solución \Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z) = \left(1-\lambda\,,\,\lambda\,,\,\frac{3\lambda+1}{2}\right)$$

2. Calcula la ecuación continua de la recta **r** paralela al plano $\pi: 2x-2y+5z=3$ y perpendicular a la recta $s: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{3}$ en el punto **P (- 1 , 2 , 0)**. (10 puntos)

La recta es perpendicular al vector director del plano π y al de la recta **s**, por lo tanto hallaremos su vector director calculando el producto vectorial de ambos vectores. Como sabemos que tiene que contener el punto **P** la recta **r** queda perfectamente determinada.

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_\pi}=(2,-2,5)\\ \overrightarrow{v_s}=(2,-1,3)\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{v_\pi}\wedge\overrightarrow{v_s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & 5\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=-6\vec{i}+10\vec{j}-2\vec{k}+4\vec{k}+5\vec{i}-6\vec{j}=-\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_s}=(-1,4,2)\Rightarrow r: \frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{2}$$

3. A) Calcular el valor de a para que la función $f(x)=\begin{cases}1-\cos x & si \quad x\le 0\\ x^2+ax & si \quad x>0\end{cases}$ verifique el teorema de Rolle en el intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2},1\right]$. (5 puntos)

b) Considerando el valor de determinado en el apartado a), probar el valor $c\in\left(-\dfrac{\pi}{2},1\right)$ tal que **f' (c) = 0.** (5 puntos)

a)

<u>Teorema de Rolle</u>

Sea **f(x)** una función continua en **[a , b],** derivable en **(a , b)** y que verifica que **f(a) = f(b)**; entonces existe, al menos, un punto $c\in(a\ ,b)$ tal que **f'(c) = 0**

La primera condición para verificar el Teorema de Rolle es que la función **sea continua y derivable.** Estudiemoslo en el punto **x = 0**

$$\begin{cases} f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1-\cos 0=1-1=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0^2+a\cdot 0=0\end{cases} \Rightarrow como\ \ f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=0\Rightarrow Es\ continua$$

$$f'(x)=\begin{cases} sen\, x & si \quad x<0\\ 2x+a & si \quad x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=sen\,0=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=2\cdot 0+a=a\end{cases}\quad\Rightarrow como \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)\Rightarrow a=0$$

$$f(x)=\begin{cases}1-\cos x & si \quad x\le 0\\ x^2 & si \quad x>0\end{cases}$$

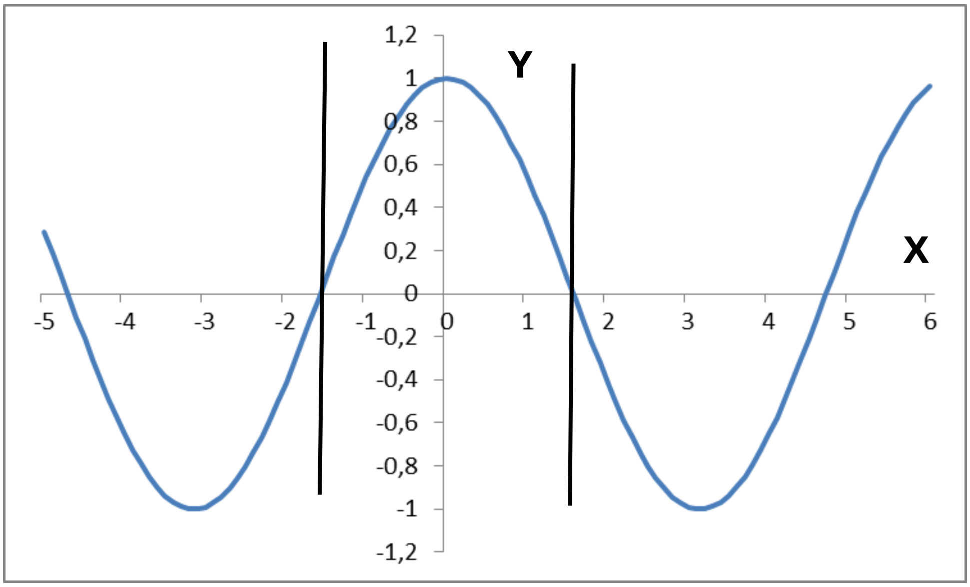
$b)$

$$\begin{cases} f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=1-\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=1-0=1\\ f(1)=1^2=1\end{cases}\Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow f'(c)=0\Rightarrow\begin{cases} sen\, x=0\Rightarrow x=0\\ 2x=0\Rightarrow x=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$c\in\left(-\frac{\pi}{2},1\right)$$

4. Haga un dibujo del recinto limitado por la curva **y(x) = cos x**, el eje OX y las rectas verticales $x=-\dfrac{\pi}{2}$ y $x=\dfrac{\pi}{2}$ (4 puntos). Calcular el área de este recinto. (6 puntos)

a)



$b)$

Es una función simétrica y positiva

$$A = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 2 \cdot [sen\ x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \left[sen\ \frac{\pi}{2} - sen\ (0) \right] = 2 \cdot (1-0) = 2\ u^2$$